# Лекция 1

Сначала вспомним что было в первом семестре по СЛАУ.

Система записывается в виде AX=B.

СЛАУ однородна, если . Соответственно, неоднородна, если .

СЛАУ совместна, если есть хотя бы одно решение. Несовместна, если решений нет.

Совместные системы, в свою очередь, делятся на определенные (1 решение), и неопределенные (больше одного решения. Потом окажется).

Любая однородная система совместна, так как имеет нулевое решение.

Теперь ТеОрЕмКи:

**Теорема 1** (Кронекера-Капелли)(критерий совместности). Система АХ=В совместна тогда и только тогда, когда

**Теорема 2** (критерий определенности системы) Система АХ=В определенна тогда и только тогда, когда

**Теорема 3** (критерий неопределенности системы). Система неопределенная тогда и только тогда, когда

**Теорема 4.** Множество решений ОСЛАУ является линейным подпространством в

Фундаментальной системой решений (ФСР) ОСЛАУ называется любой базис пространства ее решений.

**Теорема 5.**

**Следствие.** Любая линейно независимая система частных решений ОСЛАУ, состоящая из

решений, является базисом пространства решений (то есть является ФСР)

**Теорема 6.** Множество решений ОСЛАУ состоит из единственного решения(нулевого) тогда и только тогда, когда

**Следствие.** Квадратная ОСЛАУ (число уравнений равно числу неизвестных) имеет только нулевое решение (то есть является определенной) тогда и только тогда, когда .

**Теорема 7.** ОСЛАУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

**Следствие.** Квадратная ОСЛАУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

**Следствие.** Если в ОСЛАУ число уравнений <n, то система имеет ненулевое решение.

**Теорема.** Общее решение неоднородной СЛАУ есть сумма общего решения соответствующей ОСЛАУ и частного решения неоднородной СЛАУ:

Отображение множеств

**Композиция (суперпозиция) отображений**

**Свойства композиции отображений**

1. (антисвойство) в отображениях нет коммутативности
2. Ассоциативность
3. Аналогично с другой стороны

**Обратное отображение** – если

Обратное отображение обозначается

**Теорема.** (критерий существования обратного отображения). Обратное отображение тогда и только тогда, когда

**Линейное отображение линейных пространств**

f: V→W -линейное отображение, если

или

\*V и W – линейные пространства

Отображение :X→Y называется линейным оператором, если

**Теорема.** Если f: V → W линейное отображение, то

**Доказательство**.

**Ker f – ядро отображения.**

Ядро не пусто! (Всегда есть хотя бы в ядре)

Теорема. Ker f – линейное подпространство пространства V.

Доказательство. Пусть x, y Ker f.

f(x) = f(y) =

Образ линейного оператора

Т.е. x прообраз y.

Теорема. Im f – линейное подпространство W

Доказательство очевидно :)

**Мономорфизм, Эпиморфизм, Изоморфизм**

**Мономорфизм** (для функций на множестве без операций это инъекция)

**Эпиморфизм** (сюръекция на максималках)

**Изоморфизм** <=> одновременное выполнение условий эпиморфизма и мономорфизма

**Теорема** f: V → W -мономорфизм <=> Ker f = , т.е ядро тривиально.

Доказательство =>. Очевидно 😊

Доказательство <=. Пусть Ker f = . Предположим, что

**Теорема**. f : V→ W – эпиморфизм <=> Im f = W.

О

Ч

Е

В

И

Д

Н

О

# Лекция 2

**Линейные операторы**

Читайте дети Винберга‼! (Запятые расставьте сами)

*Новые формулы*

Лемма.

Доказательство

**Переход от базиса к базису**

Т. е.

**Матрица линейного оператора**

Линейное отображение

Почему

Т. к.

**Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса**

Но

Т. е.

**Подобные матрицы**

*“”*- отношение эквивалентности

**Алгебра операторов**

(нужные на данный момент аксиомы. По-хорошему надо бы доказать остальные аксиомы, но время уже 0:00, а завтра к первой паре к Максу. Так что потом мы обязательно как-нибудь докажем, что L(V) – это алгебра)

L(V)- множество всех линейных операторов

**Обратный оператор**

**Тождественный оператор** – это оператор, оставляющий все векторы на месте. Матрица такого оператора единичная.

**Теорема.** Если обратный оператор существует, то он линеен.

**Доказательство.**

Изоморфизм

Б – базис

# Лекция 3

**Теорема.**

**Доказательство**

1)Инъекция.

Если

Очевидно (на самом деле не очень)

2)Сюръекция

Взяли A, требуется построить

Очевидно???

3)Биекция

Инъекция + Сюръекция = Биекция. Тут по определению (единственная часть доказательства, которую я понял.)

4)

Но

А еще Головин сказал, что

**Дефект оператора**

**Дефектом** линейного оператора называется размерность его ядра., т.е.

Ну, собсна, усе :D. На самом деле не совсем

**Теорема о ранге и дефекте.** Сумма ранга и дефекта линейного оператора равна размерности dim V пространства V:

**Собственный вектор**

Вектор

Если

**Теорема.** Если х – собственный вектор оператора

**Доказательство.**

c собственным значением

Пусть х собственный вектор с собственным значением